المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية"

المادة: رياضيات

# فرض الفصل الثاني

الموسم الدراسي: 2022/2023

المدة: ساعتان ونصف

إعداد: عبد المطلب

## تمرين 1 (04 نقاط)

I و J العددان الحقيقيان المعرّفان كما يلي: $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}dx$ و $J=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{x}}{e^{2x}-1}dx$.

**1)** بيّن أنّ $I=\frac{1}{2}(3\ln 2-\ln 3)$.

**2)** احسب $I-J$، واستنتج حساب $J$.

**3)** $n$ عدد طبيعي أكبر تماما من 1، و $K_n$ العدد الحقيقي المعرّف بـ: $K_n=\int_{\ln n}^{\ln(n+1)}e^{-x}\ln(e^{2x}-1)\,dx$.

**أ)** باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب $K_2$.

**ب)** احسب بدلالة $n$، المجموع $S_n$ حيث: $S_n=K_2+K_3+...+K_n$. (حساب $K_n$ غير مطلوب)

## تمرين 2 (07 نقاط)

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $u_0=\alpha+2$ و $u_{n+1}=\frac{(\alpha+2)u_n}{u_n+2-\alpha}$. ($\alpha$ عدد حقيقي يختلف عن 2-)

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرّفة بـ: $v_n=\frac{u_n}{u_n-2\alpha}$.

**I-** في هذا الجزء من التمرين نفرض أنّ: $\alpha=1$.

**1)** تحقّق أنّ: $u_{n+1}=3-\frac{3}{u_n+1}$، ثم برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $2<u_n<4$.

**2)** بيّن أنّ المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما، ثم استنتج أنّها متقاربة.

**3)** برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_n=\frac{6}{3-3^{-n}}$، واستنتج $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

**4)** اكتب عبارة $v_n$ بدلالة $n$، ثم عيّن أصغر عدد طبيعي $n$ يحقّق $v_n\geq e^{66}$.

**5)** احسب بدلالة $n$، المجموع $S_n$ حيث: $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+...+\frac{1}{u_n}$.

**II-** نفرض في هذا الجزء أنّ: $-2<\alpha<0$.

**1)** بيّن أنّ المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $\frac{2+\alpha}{2-\alpha}$، ثم اكتب عبارة $v_n$ بدلالة $n$ و $\alpha$.

**2)** بيّن أنّ $0<\frac{2+\alpha}{2-\alpha}<1$، ثم استنتج اتّجاه تغيّر المتتالية $(v_n)$ واحسب نهايتها.

**3)** لكل عدد طبيعي $n$ غير معدوم، نضع: $S'_n=\ln\left((2-\alpha)v_0\right)+\ln\left((2-\alpha)^2v_1\right)+...+\ln\left((2-\alpha)^n v_{n-1}\right)$.

احسب بدلالة $n$ و $\alpha$، المجموع $S'_n$.

اقلب الورقة

**تمرين 3 (09 نقاط)**

**I-** $g$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ: $g(x)=-e^{x}(e^{x}+2x)$.

**1)** احسب $g(0)$ ، و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

**2)** احسب $g'(x)$ ، ثم بيّن أنّ $g'(x)<0$ من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0\,;+\infty[$.

**3)** شكّل جدول تغيرات الدالة $g$، واستنتج أنّ $g(x)+1\leq 0$ من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0\,;+\infty[$.

**II-** $f$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{1-e^{x}}{1+e^{x}}\right)$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

**1)** بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f(-x)=f(x)$. ماذا تستنتج؟ فسّر ذلك بيانيا.

**2)** أ) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، و أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+\dfrac{x}{2}\right)=0$.

ب) ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y=-\dfrac{x}{2}$. ماذا يمثل $(\Delta)$؟

**3)** أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ موجب، $f'(x)=\dfrac{1+g(x)}{2(1+e^{x})^{2}}$.

ب) بيّن أنّ $f$ متناقصة تماما على $]0\,;+\infty[$. استنتج اتجاه تغيّر الدالة $f$ على $\mathbb{R}$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

**4)** أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=-1$ تقبل حلين $\alpha$ و $\beta$ حيث $2{,}3<\alpha<2{,}4$. استنتج حصرا للعدد $\beta$.

ب) اكتب معادلة للمستقيم $(\Delta')$ المقارب المائل لـ $(\mathscr{C})$ بجوار $-\infty$ ، ثم ارسم $(\Delta)$، $(\Delta')$ و $(\mathscr{C})$.

**III-** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $u_0=1$ و $u_{n+1}=f(u_n)+\dfrac{u_n}{2}$.

**1)** برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_n>0$.

**2)** بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$، المتتالية $(u_n)$ متناقصة. استنتج أنّها متقاربة.

**3)** أ) بيّن أنّه يوجد عدد حقيقي $k$ من المجال $]0;1[$ ، حيث من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1}\leq k\,u_n$.

ب) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_n\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$ ، ثم احسب نهاية المتتالية $(u_n)$.

بالتّوفيق

# تصحيح الفرض للفصل الثاني 2023م

"عبد المطلب"

## تمرين 1:

1) $I=\int_{\ln2}^{\ln3}\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}dx=\frac{1}{2}\int_{\ln2}^{\ln3}\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}dx=\frac{1}{2}\left[\ln(e^{2x}-1)\right]_{\ln2}^{\ln3}$

$I=\frac{1}{2}(\ln8-\ln3)=\frac{1}{2}(3\ln2-\ln3)=\ln\frac{2\sqrt{6}}{3}$

2) $I-J=\int_{\ln2}^{\ln3}\frac{e^{2x}-e^{x}}{e^{2x}-1}dx=\int_{\ln2}^{\ln3}\frac{e^{x}(e^{x}-1)}{(e^{x}+1)(e^{x}-1)}dx$

$I-J=\int_{\ln2}^{\ln3}\frac{e^{x}}{e^{x}+1}dx=\left[\ln(e^{x}+1)\right]_{\ln2}^{\ln3}$

$I-J=\ln4-\ln3=\ln\frac{4}{3}$

$J=I-\ln\frac{4}{3}$ ومنه: $J=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

3) أ) $K_2=\int_{\ln2}^{\ln3}e^{-x}\ln(e^{2x}-1)dx$

$\begin{cases}u(x)=\ln(e^{2x}-1)\\ v'(x)=e^{-x}\end{cases}$ $\begin{cases}u'(x)=\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}\\ v(x)=-e^{-x}\end{cases}$

$K_2=\left[-e^{-x}\ln(e^{2x}-1)\right]_{\ln2}^{\ln3}+\int_{\ln2}^{\ln3}\frac{2e^{x}}{e^{2x}-1}dx$

$K_2=\frac{-\ln8}{3}+\frac{\ln3}{2}+2J=\frac{1}{2}(3\ln3-4\ln2)=\ln\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

ب) $S_n=\int_{\ln2}^{\ln3}e^{-x}\ln(e^{2x}-1)dx+\int_{\ln3}^{\ln4}e^{-x}\ln(e^{2x}-1)dx+\dots+\int_{\ln n}^{\ln(n+1)}e^{-x}\ln(e^{2x}-1)dx$

علاقة شال: $S_n=\int_{\ln2}^{\ln(n+1)}e^{-x}\ln(e^{2x}-1)dx$

نضع: $I_n=\int_{\ln2}^{\ln(n+1)}\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}dx$ و $J_n=\int_{\ln2}^{\ln(n+1)}\frac{e^{x}}{e^{2x}-1}dx$

$I_n-J_n=\int_{\ln2}^{\ln(n+1)}\frac{e^{x}}{e^{x}+1}dx=\left[\ln(e^{x}+1)\right]_{\ln2}^{\ln(n+1)}$

$J_n=\left[\frac{1}{2}\ln(e^{2x}-1)-\ln(e^{x}+1)\right]_{\ln2}^{\ln(n+1)}$

$J_n=\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)\right]_{\ln2}^{\ln(n+1)}$

لحساب $S_n$ نستعمل المكاملة بالتجزئة:

$S_n=\left[-e^{-x}\ln(e^{2x}-1)\right]_{\ln2}^{\ln(n+1)}+2J_n$

$S_n=\left[-e^{-x}\ln(e^{2x}-1)+\ln\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)\right]_{\ln2}^{\ln(n+1)}$

$S_n=-\frac{\ln(n^2+2n)}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+2}\right)+\frac{3}{2}\ln3$

## تمرين 2:

I- $V_n=\frac{U_n}{U_n-2}$ و $U_{n+1}=\frac{3U_n}{U_n+1}$

1) $U_{n+1}=\frac{3U_n+3-3}{U_n+1}=3-\frac{3}{U_n+1}$ .

$n=0$: $U_0=3$ ، $2<U_0<4$ (محققة)

نفرض أن $2<U_n<4$ من أجل $n$ كيفي، ونبرهن صحتها من أجل $n+1$، أي $2<U_{n+1}<4$ .

$2<U_n<4$ ؛ $3<U_n+1<5$ ؛ $\frac{1}{5}<\frac{1}{U_n+1}<\frac{1}{3}$

$-1<\frac{-3}{U_n+1}<-\frac{3}{5}$ ؛ $2<3-\frac{3}{U_n+1}<\frac{12}{5}<4$

$2<U_{n+1}<4$ ، ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ $2<U_n<4$

2) $U_{n+1}-U_n=\frac{3U_n}{U_n+1}-U_n=\frac{-U_n^2+2U_n}{U_n+1}$

$U_{n+1}-U_n=\frac{U_n(2-U_n)}{U_n+1}<0$

لأن $2-U_n<0$ و $U_n>0$، ومنه $(U_n)$ متناقصة

$(U_n)$ متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

3) $n=0$: $U_0=3$ محققة $\left(U_0=\frac{6}{3-1}=3\right)$

نفرض صحة $U_n$ من أجل $n$ كيفي ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي: $U_{n+1}=\frac{6}{3-3^{-n-1}}$ ،

$U_{n+1}=\frac{3U_n}{U_n+1}=\frac{3\left(\frac{6}{3-3^{-n}}\right)}{\frac{6}{3-3^{-n}}+1}=$

$\frac{3\times6}{9-3^{-n}}=\frac{3\times6}{3\left(3-\frac{3^{-n}}{3}\right)}=\frac{6}{3-3^{-n-1}}$ (محققة)

ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ $U_n$ محققة.

$\lim_{n\to+\infty}U_n=\frac{6}{3}=2$ لأن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$

4) $V_n=\frac{U_n}{U_n-2}=\frac{\frac{6}{3-3^{-n}}}{\frac{6}{3-3^{-n}}-2}=\frac{6}{2\times3^{-n}}$

$V_n=\frac{3}{3^{-n}}=3^{n+1}$

$V_n\geq e^{66}$ ، $3^{n+1}\geq e^{66}$ ، $\ln3^{n+1}\geq\ln e^{66}$

$(n+1)\ln3\geq66$ ، $n+1\geq\frac{66}{\ln3}$ ،

$n\geq59{,}07$ ومنه: $n=60$

5) $S_n=\frac{1}{U_0}+\frac{1}{U_1}+\dots+\frac{1}{U_n}$

$S_n=\frac{3-3^{0}}{6}+\frac{3-3^{-1}}{6}+\dots+\frac{3-3^{-n}}{6}$

$S_n=\frac{3+3+\dots+3-(3^{0}+3^{-1}+3^{-2}+\dots+3^{-n})}{6}$

مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول 1

$S_n=\frac{3(n+1)-\left(\frac{1-3^{-n-1}}{1-3^{-1}}\right)}{6}=\frac{3(n+1)-\frac{3}{2}(1-3^{-n-1})}{6}$

$S_n=\frac{2n+1+3^{-n-1}}{4}$

II 1) $V_{n+1}=\frac{U_{n+1}}{U_{n+1}-2\alpha}=\frac{\frac{(\alpha+2)U_n}{U_n+2-\alpha}}{\frac{(\alpha+2)U_n}{U_n+2-\alpha}-2\alpha}$

$V_{n+1} = \frac{(\alpha+2)U_n}{(2-\alpha)U_n - 2\alpha(2-\alpha)} = \frac{\alpha+2}{2-\alpha}\left(\frac{U_n}{U_n-2\alpha}\right)$

ومنه $(V_n)$ متتالية هندسية: $q=\frac{2+\alpha}{2-\alpha}$ ; $V_{n+1}=\left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)V_n$

$V_n = V_0 q^n = \left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)\left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)^n = \left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)^{n+1}$

(2 $-2<\alpha<0$ ; $0<-\alpha<2$ ; $2<2-\alpha<4$

$\frac14<\frac{1}{2-\alpha}<\frac12$ ; $0<2+\alpha<2$ ; ومنه:

$0<\frac{2+\alpha}{2-\alpha}<1$ ; $0<q<1$ و $V_0>0$ فهي متناقصة

$\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$

(3 $S'_n = \ln(2-\alpha)\left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right) + \ln(2-\alpha)^2\left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)^2 + \dots + \ln(2-\alpha)^n\left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)^n$

$S'_n = \ln(2+\alpha)+\ln(2+\alpha)^2+\dots+\ln(2+\alpha)^n$

$S'_n = \ln(2+\alpha)+2\ln(2+\alpha)+\dots+n\ln(2+\alpha)$.

$S'_n = (1+2+\dots+n)\ln(2+\alpha) = \frac{n(n+1)}{2}\ln(2+\alpha)$

## تمرين 3:

I- 1) $g(0)=-1$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

2) $g'(x) = -(e^x(e^x+2x)+e^x(e^x+2))$

$= -2e^x(x+1+e^x)<0$ لأن $x\geq0$ .

3)

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-1$ ↘ | $-\infty$ |

لاحظ أن $g(x)\leq -1$ ، ومنه: $g(x)+1\leq0$ من أجل كل $x\in[0;+\infty[$

II- 1) من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإن $-x\in\mathbb{R}$ .

$f(-x) = \frac{-x}{2}\left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) = \frac{-x}{2}\left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)\frac{e^x}{e^x}$

$f(-x) = \frac{-x}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) = \frac{x}{2}\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right) = f(x)$

ومنه $f$ زوجية. $(C)$ متناظر بالنسبة لـ $(y'Oy)$ .

2) أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2}\left[\frac{e^x(\frac{1}{e^x}-1)}{e^x(\frac{1}{e^x}+1)}\right] = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac x2\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac x2\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}+1\right)$

$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac x2\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac x2\left(\frac{2}{1+e^x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac x2\right)=0$

ب) ندرس إشارة: $\left(f(x)+\frac x2\right) = \frac{x}{e^x+1}$ ومنه:

$x>0$ : $(C)$ أعلى $(\Delta)$ ، $x<0$ : $(C)$ أسفل $(\Delta)$

$(C)$ يقطع $(\Delta)$ عند المبدأ $O(0;0)$ .

$(\Delta)$ يمثل المستقيم المقارب المائل لـ $(C)$ بجوار $+\infty$ .

3) أ) $f'(x) = \frac12\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)+\frac x2\left(\frac{-e^x(e^x+1)-e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^2}\right)$

$f'(x) = \frac{(1-e^x)(1+e^x)+x(-2e^x)}{2(1+e^x)^2} = \frac{1-e^{2x}-2xe^x}{2(1+e^x)^2}$

$f'(x) = \frac{1+g(x)}{2(1+e^x)^2}$

ب) $1+g(x)\leq0$ ومنه $f$ متناقصة تماما على $[0;+\infty[$

$f$ زوجية فهي متزايدة تماما على $]-\infty;0]$ .

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $0$ | ↘ $-\infty$ |

4) أ) $f$ مستمرة ومتناقصة على $]2{,}3;2{,}4[$ ؛

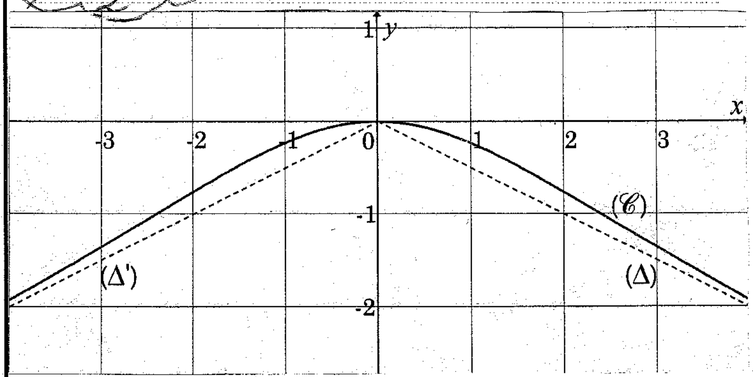
$f(2{,}4) = -1{,}0004<-1$ و $f(2{,}3)=-0{,}94>-1$ ومنه:

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن: $f(x)=-1$

تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على $]2{,}3;2{,}4[$ حيث $f(\alpha)=-1$ .

$f(-x)=f(x)$ و منه: $-2{,}4<\beta<-2{,}3$

ب) $f$ زوجية: $f(-x)=f(x)$ ومنه: $(\Delta'): y=\frac{x}{2}$




III- 1) $n=0$ : $U_0=1$ ، $U_0>0$ (محققة)

نفرض أن $U_n>0$ من أجل كل عدد $n$ كيفي،

ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي $U_{n+1}>0$ .

مما سبق لما $x>0$ ، $\left(f(x)+\frac x2\right)>0$ ومنه:

$U_{n+1}=\left(f(U_n)+\frac{U_n}{2}\right)>0$ ، إذن $U_n>0$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ .

2) $U_{n+1}-U_n = f(U_n)-\frac{U_n}{2} = \frac{-U_ne^{U_n}}{e^{U_n}+1}<0$

ومنه $(U_n)$ متناقصة.

$(U_n)$ متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

3) أ) لدينا: $U_{n+1}=f(U_n)+\frac{U_n}{2}=\frac{U_n}{e^{U_n}+1}$

$U_n>0$ ، $e^{U_n}>1$ ، $e^{U_n}+1>2$

$\frac{1}{e^{U_n}+1}<\frac12$ عند ضرب طرفي المتباينة بـ $(U_n)$

$\frac{U_n}{e^{U_n}+1}<\frac{U_n}{2}$ ومنه: $U_{n+1}<\frac12U_n$

إذن: $k=\frac12$

ب) $n=0$ : $U_0\leq\left(\frac12\right)^0$ ، $U_0\leq1$ . محققة

نفرض أن $U_n\leq\left(\frac12\right)^n$ من أجل $n$ كيفي ونبرهن صحتها من أجل $(n+1)$ أي $U_{n+1}\leq\left(\frac12\right)^{n+1}$ .

لدينا: $U_n\leq\left(\frac12\right)^n$ ، $\frac12U_n\leq\frac12\left(\frac12\right)^n$ (نضرب بـ $\frac12$)

$\frac12U_n\leq\left(\frac12\right)^{n+1}$ ولدينا سابقا $U_{n+1}\leq\frac12U_n$ ،

ومنه $U_{n+1}\leq\left(\frac12\right)^{n+1}$ ، إذن $U_n\leq\left(\frac12\right)^n$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

$0<U_n\leq\left(\frac12\right)^n$ و $\lim\left(\frac12\right)^n=0$ ومنه: $\lim_{n\to+\infty}U_n=0$ (مبرهنة الحصر)